10. cvičení - teorie

!!! Vždy je třeba si hlídat definiční obory **!!!**

Goniometrické substituce

Nechť $R(\cdot,\cdot)$ je racionální funkce dvou proměnncýh (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

- $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \cos x,\ \mathrm{d}t = -\sin x\ \mathrm{d}x$
- $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \sin x,\ \mathrm{d}t = \cos x\ \mathrm{d}x$
- $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \implies t = \tan x$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

  Pak
  $$\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t, \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$
- Vždy: $t = \tan\frac{x}{2}$ pro $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

  Pak
  $$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Odmocniny

Nechť $R(\cdot,\cdot)$ je racionální funkce dvou proměnncýh (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

U níže uvedených substitucí: k dopočtu $\mathrm{d}t$ nejdříve vyjádříme x v závislosti na t a pak teprve derivujeme (vizte příklad níže)

- $R\left(x, \sqrt[m]{x+a}\right), m \in \mathbb{N}, m > 1, \implies t = \sqrt[m]{x+a}$
- $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), m \in \mathbb{N}, m > 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq bc \implies t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$
  - $ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2 \implies \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-x_1|$
  - $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \implies t = \sqrt{a\frac{x-x_1}{x-x_2}}$
  - ax^2+bx+c nemá kořen $\implies t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}$

Poznámka. Vyskytuje-li se v integrálu více odmocnin, převedeme je na mocniny téže odmocniny (např. $\sqrt{x}$ a $\sqrt[3]{x}$ převedeme na $(\sqrt[6]{x})^3$ a $(\sqrt[6]{x})^2$).

Příklad. $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

$$t^2 = \frac{x+1}{x-2} \implies t^2(x-2) = x+1 \implies x(t^2-1) = 1+2t^2 \implies x = \frac{2t^2+1}{t^2-1}$$

$$x = \frac{2t^2+1}{t^2-1} \implies \mathrm{d}x = \frac{4t(t^2-1)-(2t^2-1)2t}{(t^2-1)^2}\ \mathrm{d}t = \frac{4t^3-4t-4t^3-2t}{(t^2-1)^2}\ \mathrm{d}t = \frac{-6t}{(t^2-1)^2}\ \mathrm{d}t$$